Persamaan Differensial

Slide : Tri Harsono

April, 2005

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
ITS

Jenis PD

- Berdasarkan ruas kanannya:
  - PD Homogin
  - PD Non Homogin
- Berdasarkan independent variable-nya:
  - PD Biasa
  - PD Parsial
- Berdasarkan derajat differensialnya:
  - PD Linier
  - PD Non Linier

Istilah-Istilah dalam PD

- **Derajad PD**: pangkat *tertinggi* pada PD,
- **Orde PD**: turunan *tertinggi* pada PD
- **PUPD(**: Penyelesaian Umum PD) adl: penyel. yg masih mengandung konstanta esensiel,
- **PKPD(**: Penyelesaian Khusus PD) adl: penyel. yg tidak mengandung konstanta esensiel.
- **Konstanta esensiel** (konstanta dasar): konstanta yang tidak dapat disederhanakan lagi.

Bentuk-Bentuk PD Biasa ***Orde 1***

- PD Variabel Terpisah,
- PD Variabel yg dapat dipisah,
- PD Eksak,
- Integrating Factors,
- Linear First-Order Differential Equation,
- Variation of Paramaters,
- Picard’s Iteration Method

Soal : Newton's law of cooling

- A copper ball is heated to a temperature of 100°C. Then at time t=0 it is placed in water which is maintained at a temperature of 30°C. At the end of 3 minutes the temperature of the ball is reduced to 70°C. Find the time at which the temperature of the ball is reduced to 31°C.

Model matematik dari hukum pendingin Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$$

- **Termasuk PD Variabel yang dapat dipisah Orde1**
- **Tentukan PUPD-nya**
- **Carilah PKPD-nya**

Initial Value Problem

- Masalah Nilai Awal (Initial Value Problem) digunakan untuk mencari nilai konstanta dasar (= c),
- Dengan adanya initial value problem maka PUPD akan menjadi PKPD.

Tugas:

1. Selesaikan Pers Diff berikut:

$$a.\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$

$$b.\frac{dy}{dx}\sin 2x = y\cos 2x$$

$$c.y\frac{dy}{dx} = 0.5\sin^2 \omega x$$

2. "Initial Value Problem". Selesaikan PD di bwh ini.

$$a.L\frac{di}{dt} + Ri = 0; \quad i(0) = i_0$$

$$b.dr\sin\theta = 2r\cos\theta d\theta; \quad r(\frac{\pi}{2}) = 2$$

$$c.\frac{dr}{dt} = -tr; \quad r(0) = r_0$$

$$d.v\frac{dv}{dx} = k; \quad k = konstan \quad v(x_0) = v_0$$

PD yang dapat dirubah ke Bentuk PD Var Terpisah

- PD orde 1 tertentu terkadang variabelnya tidak dapat dipisah,
- Tetapi dapat dibuat terpisah dengan suatu cara yg mudah, yaitu:
  - Dengan merubah variabelnya menjadi

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \textbf{.............(1)}$$

  - Dimana g adalah fungsi y/x yang telah diberikan,
  - Contoh : $(y/x)^3$, sin(y/x), dsb

PD yang dapat dirubah ke Bentuk PD Var Terpisah

- Seting y/x = u,
- Bisa dinyatakan bahwa y dan u adalah fungsi dari x,
- Maka dapat dibentuk fungsi y = ux,
- Differensiasi dari y didapatkan:

$$\frac{dy}{dx} = u + u'x \qquad \text{..............(2)}$$

- Substitusi 2 ke dalam 1 dan g(y/x)=g(u), didapatkan:

$$u + u'x = g(u)$$

PD yang dapat dirubah ke Bentuk PD Var Terpisah

- Akhirnya dapat dipisahkan var x dan u, sehingga :

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

- Dengan mengintegralkan dan mengganti u dengan y/x, didapatkan PUPD-nya.

PD yang dapat dirubah ke Bentuk PD Var Terpisah

- Contoh:

1. Selesaikan PD orde 1 berikut:
   a. $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$
   b. $(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$
2. Carilah PUPD dari PD orde 1 berikut:
   a. $xy' = x + y$
   b. $xy' = (y - x)^3 + y$
   c. $x^2y' = y^2 + xy + x^2$
   d. $y' = (y - x)/(y + x)$

PD yang dapat dirubah ke Bentuk PD Var Terpisah

3. Selesaikan *masalah nilai awal* berikut:
   a. $2x^2yy' = tg(x^2y^2) - 2xy^2$; $y(1)=\sqrt{(\pi/2)}$
   b. $y' = (y - x)/(y - x - 1)$; $y(-5) = -5$

PD Orde 1 Linier

- Bentuk Umum :

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$$

•Ciri linier PD itu ada pada y dan dy/dx
•f dan r terkadang fungsi dari x

•**PUPD nya:**

$$y(x) = e^{-h}\left(\int e^{h} r\,dx + c\right)$$

dimana

$$h = \int f(x)\,dx$$

PD Orde 1 Linier

- Contoh:

1. Selesaikan PD Orde 1 berikut:

a. $y' - y = e^{2x}$

b. $xy' + y + 4 = 0$

c. $xy' + y = \sin x$

2. Selesaikan *masalah nilai awal* berikut:

a. $y' + y\,\mathrm{tg}(x) = \sin(2x); \quad y(0) = 1$

b. $x^2y' + 2xy - x + 1 = 0; \quad y(1) = 0$

PD Orde 1 Linier

3. "**Hukum Pendingin Newton**".

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$$

T = temperatur sebuah bola logam, diletakkan pada suatu medium yang dijaga temperaturnya konstan T_1.
Carilah penyelesaian umum dari temperatur bola bila temperatur awal bola $T(0) = T_o$

PD Orde 1 Linier

4. Selesaikan PD Orde 1 berikut:

a. $y' + y = \sin(x)$

b. $y' + 2y = 6e^{x}$

c. $y' + ky = e^{-kx}$, dimana k adalah koefisien

d. $xy' - 2y = x^{3}e^{x}$

e. $y' + y = (x + 1)^{2}$; $y(0) = 0$

f. $xy' - 3y = x^{4}(e^{x} + \cos x) - 2x^{2}$; $y(\pi) = \pi^{3}e^{\pi} + 2\pi^{2}$

Tugas2

- Selesaikan Pers. Diff. berikut ini :

1. $xy' = 2x + 2y$
2. $y' = (y+x)/(y-x)$
3. $xyy' = 2y^2 + 4x^2$; $y(2) = 4$
4. $y' - y = e^x$; $y(1) = 0$
5. An extended object falling downward is known to experience a resistive force of the air (called *drag*). We assume the magnitude of this force to be proportional to the speed v. Using Newton's second law, show that :

$$mv' = -kv - mg$$

$g = 9.80\ \text{m/sec}^2$

Selesaikan model PD itu dengan metode:

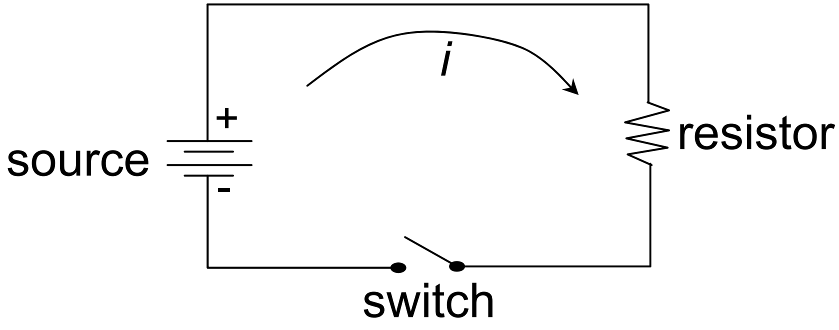
a. PD Orde1 Linier
b. PD Var Terpisah

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- PD orde 1 linier mempunyai banyak aplikasi dalam bidang fisika dan teknik
- Untuk contoh adalah aplikasi pada rangkaian listrik
- Tujuan: bagaimana kita **memodelkan**, yaitu menyatakan kondisi fisik menjadi relasi matematik
- Transisi dari sistem fisik ke suatu model matematik yang bersesuaian "selalu" menjadi langkah pertama dalam **matematika teknik**
- Langkah pertama ini "penting", membutuhkan pangalaman dan latihan yang hanya dapat diperoleh dengan mencoba memodelkan contoh-contoh khusus dari berbagai plant (obyek fisik).

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Rangkaian listrik yang paling sederhana adalah sebuah rangkaian seri,
- Dimana kita mempunyai sebuah sumber energi listrik (electromotive force) misal sebuah generator atau sebuah baterai dan sebuah resistor yang menggunakan energi.
- Sebagai contoh: sebuah *lampu pijar elektrik* pada gambar di bawah ini.



Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Bila switch ditutup sebuah arus *i* akan mengalir melalui resistor dan menyebabkan tegangan turun, yaitu: potensial elektrik pada kedua ujung resistor akan berbeda,
- Perbedaan potensial/tegangan turun tadi dapat diukur dengan menggunakan voltmeter.
- Eksperimen menunjukkan bahwa "penurunan tegangan E_R yg melewati sebuah resistor proporsional terhadap arus *i* pada saat itu, dan ditulis:

$$E_R = Ri$$

R = konstanta proporsional disebut sebagai resistansi dari resistor

Hukum OHM

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Dua elemen penting lainnya adalah induktor dan kapasitor
- Sebuah induktor melawan suatu perubahan dalam arus,
- Mempunyai efek inersia dalam electricity yang sama dengan masa dalam bidang mekanik (analogi bid listrik dengan mekanik)
- Eksperimen menghasilkan hukum berikut: "Penurunan tegangan E_L yg melewati sebuah induktor proporsional thd nilai perubahan arus i pada saat itu", dan ditulis :

$$E_L = L\frac{di}{dt}$$

L = konstanta proporsional disebut sebagai induktansi dari induktor

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Kapasitor adalah suatu elemen yg menyimpan energi,
- Eksperimen menghasilkan hukum berikut: “Penurunan tegangan E_C yang melintasi sebuah kapasitor proporsional terhadap muatan listrik (electric charge) Q pada kapasitor, ditulis :

$$E_C = \frac{1}{C} Q$$

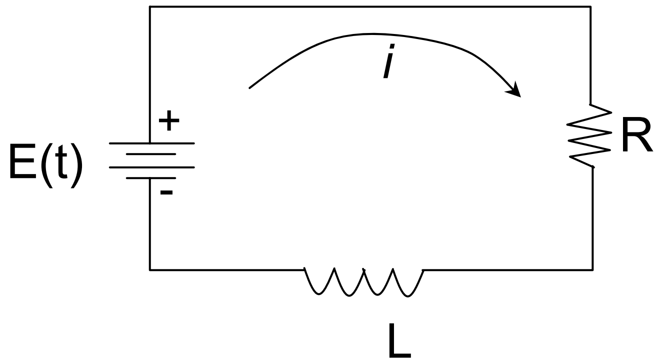
C = kapasitansi (farad) dan muatan Q diukur dalam coulomb

Sejak

$$i = \frac{dQ}{dt} \Longrightarrow E_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t^*) dt^*$$

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Untuk arus i(t) dalam suatu rangkaian dapat dicari dari persamaan-persamaan yang didapatkan dari hukum fisik berikut:
- "Jumlah penurunan tegangan pada suatu loop tertutup sama dengan NOL" (**KVL**)
- ***Contoh 1***: Perhatikan rangkaian *RL seri* berikut



Hitung arus yang mengalir, bila:

a. $E(t) = E_0$ = Konstan

b. $E(t) = E_0 \sin\omega t$

Ket.: gunakan cara PD linier orde 1

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Jawab 1a. ***RL seri*** : E(t)=E_0=konstan (*Constant Electromotive Force*)
  - Dari KVL, E_R dan E_L didapatkan model matematika dari RL seri :

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)$$

  - Dengan menggunakan PD linier orde 1, didapatkan PUPDnya:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{E_0}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}dt + c\right]$$

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

untuk *t* yang lama maka *i*(*t*) konstan ke E_0/R

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Jadi dari persamaan arus listrik i(t) yg didapatkan di atas (baris terakhir) terlihat bhw arus tidak bergantung dari konstanta dasar c, artinya berapapun besar c, arus tetap konstan ke E_0/R.
- Untuk Penyelesaian partikulir (penyelesaian khusus/PKPD) pada "kondisi awal" i(0)=0, didapatkan persamaan arus:

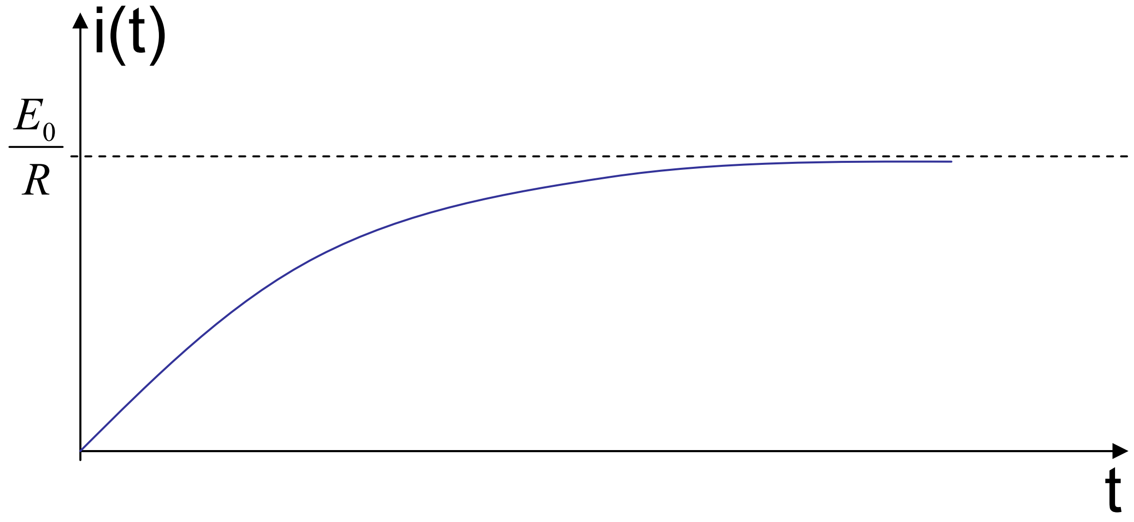
$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

τ_L = L/R dinamakan "**konstanta waktu induktif**" dari rangkaian

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Sketsa grafik kuat arus i(t) persamaan terakhir:



Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Jawab 1b. ***RL seri*** : E(t)= $E_0 \sin \omega t$ (*Periodic Electromotive Force*)
  - Dengan menggunakan PD linier orde 1, didapatkan PUPDnya:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt + c\right]$$

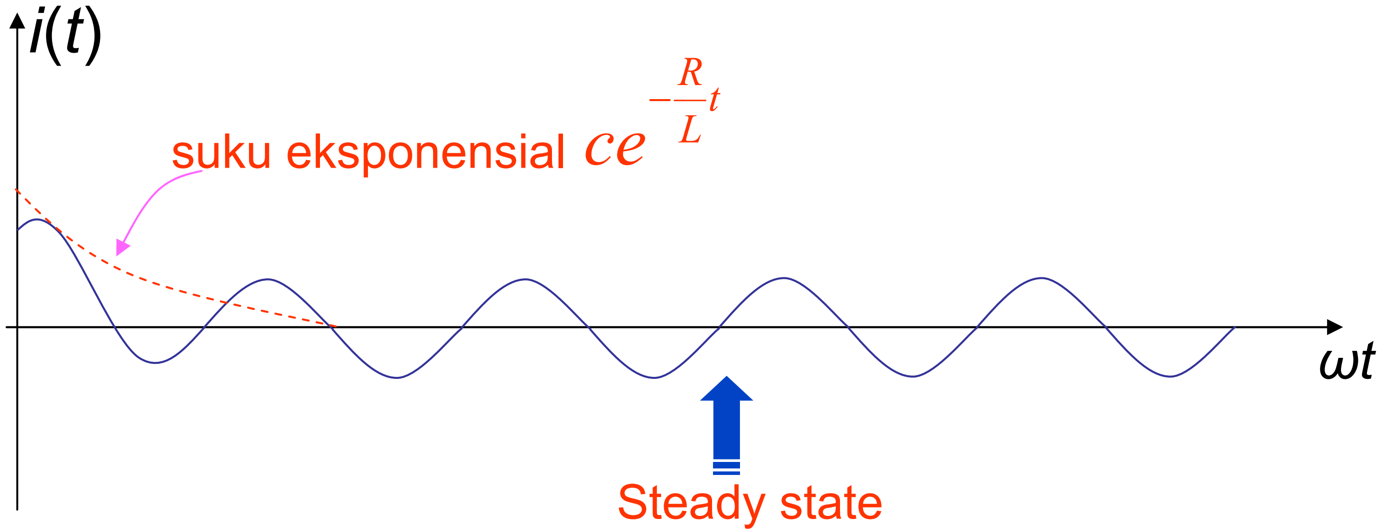
$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}\left(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t\right)$$

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}R\sin(\omega t-\delta) \quad \rightarrow \quad \delta = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

Pada suku pertama, untuk *t* yang besar (infinity) nilainya menuju NOL, sehingga *i*(*t*) akhirnya mengalami getaran harmonisa.

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Sketsa grafik dari fungsi arus yg didapatkan:



Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

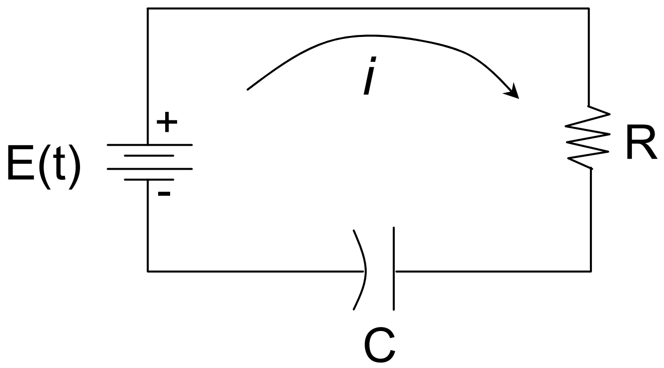
- Pengertian fisis dari soal RL seri di atas adalah:
  - Sebuah sistem elektrik atau dinamik dikatakan dalam kondisi setimbang (steady state) pada saat variabel-variabelnya (misal arus) merupakan fungsi "periodik" atau "konstan"
  - Sistem itu dikatakan dalam kondisi transien (transient state) pada saat tidak dalam kondisi steady state (unsteady state)
  - Variabel-variabel yg bersesuaian dinamakan : fungsi steady state dan fungsi transien
  - Pada contoh 1 di atas:
    - Fungsi steady state utk soal 1a. adl: E_0/R
    - Fungsi steady state utk soal 1b. adl: $\dfrac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\omega t-\delta)$

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Pengertian fisis dari soal RL seri di atas adalah:
  - Sebelum arus mencapai stedy state, pasti melalui kondisi transien lebih dahulu
  - Kondisi transien ini terjadi karena induktor dan kapasitor menyimpan energi, dan arus induktor serta tegangan kapasitor yg bersesuaian tidak dapat diubah dengan tiba-tiba
  - Secara praktis, kondisi/masa transien ini terjadi dalam "waktu yang singkat"

Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- ***Contoh 2***: Perhatikan rangkaian *RC seri* berikut



Hitung arus yang mengalir, bila:

a. $E(t) = E_0$ = Konstan

b. $E(t) = E_0 \sin \omega t$

Ket.: gunakan cara PD linier orde 1

SOAL

1. Dapatkan penyelesaian contoh 1a. yg memenuhi kondisi awal $i(0)=0.5E_0/R$ dan gambarkan sketsa grafiknya.
2. Dalam contoh 1a., bila R=20 ohm, L=0.03 milihenry, dan i(0)=0, hitung waktu t pada saat arus i mencapai 99.9% dari nilai akhir.
3. Dalam contoh 1a., bila E_0=100 volt, R=1000 ohm, dan L=4 henry. Hitung τ_L, gambarkan sketsa grafik i(t), hitung E_R dan E_L.
4. Berapa nilai L yang dipilih, dalam sebuah RL seri dengan R=100 ohm untuk arus yang mencapai 99.9% dari nilai akhir saat t=0.01 detik?
5. Sebuah RC seri dengan R=200 ohm dan C=0.1 farad diberi muatan (dari sumber $E(t)=E_0$=12 volt).Hitung tegangan pada kapasitor E_C dengan anggapan bahwa saat t=0 kapasitor belum diberi muatan.
6. Tentukan arus i(t) dalam rangkaian RC seri dengan asumsi E=100 volt, C=0.25 farad, dan R adalah variabel yg mengikuti persamaan R=(100-t) ohm untuk $0 \le t \le 100$ det, dan R=0 untuk t>100 det. Kondisi awal i(0)=1 ampere.

SOAL

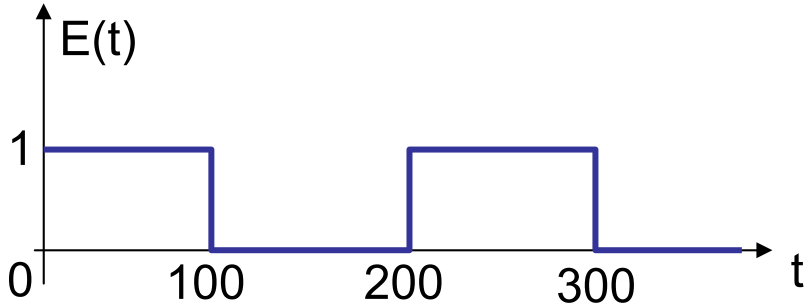
7. Tunjukkan bahwa persamaan differensial RC seri (dalam arus i(t)) dapat dirubah menjadi persamaan dalam muatan Q(t):

$$RC(dQ/dt) + (1/C)Q = E(t)$$

Selesaikan persamaan tsb utk E(t)=0 dengan asumsi $Q(0)=Q_0$.

8. Dari persamaan muatan pada RC seri, bila R=20 ohm, C=0.01 farad dan E(t)=60e-2t volt, dengan asumsi Q(0)=0, hitung Q(t) dan tampilkan sketsa grafiknya. Tentukan juga waktu yg dibutuhkan untuk Q(t) yang maksimum.

9. Hitunglah arus i(t) dari rangkaian RL seri, dengan R=1ohm, L=100 henry, kondisi awal i(0)=0, dan sumber tegangan E(t) seperti pada gambar di bawah ini



SOAL

10. Tentukan output dari RL seri bila nilai awal i(0) = 0

Tugas 3

Kerjakan soal-soal di atas 4 nomer dari 9 nomer (pilih sembarang). Kumpulkan 2 mingg. Lagi.

The End
of
Diff. Eq.