Persamaan Differensial Biasa Orde 2

Slide : Tri Harsono

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

ITS

1. PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan Orde 2

- Bentuk Umum:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

- Terhadap ruas kanan (fungsi input):
  - Bila x(t) = 0 → "PD Homogin"
  - Bila x(t) ≠ 0 → "PD Non Homogin"
- a_0, a_1, a_2 = koefisien konstan
- *t* variabel bebas

1. PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan Orde 2

- *PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan*

$$a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

Bgm Penyelesaian Umum (PUPD) ?

Dapat diselesaikan dengan metode Operator D, Metode Koefisien Tdk Tentu, Transformasi Laplace.

Operator D (Operator Differensial)

- $D=d/dt$ atau d/dx
- Artinya : differensial pertama
- Contoh:

  Terdapat suatu fungsi dalam x, yaitu $y=e^{2x}$

  Tentukan Dy, artinya mencari differensial pertama dari $y=e^{2x}$

  Sehingga $Dy=2e^{2x}$
- Bila dijumpai D^2y, berarti differensial kedua dari fungsi $y=e^{2x}$
- Kondisi ini terjadi pada semua jenis fungsi y yang lainnya

1. PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan Orde 2

- *Dengan Operator D*

Ada 3 jenis penyelesaian umum:

- Dua akar riil yang berbeda ($r_1 \neq r_2$) → Overdamping
- Dua akar kompleks konjugat ($r_{1,2} = a \pm jb$) → Underdamping
- Akar kembar ($r_1 = r_2 = r$) → Critical damping

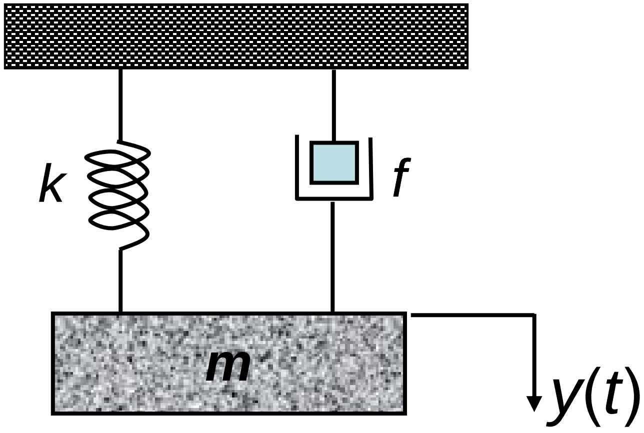
Didapatkan dari Persamaan Karakteristik

SOAL

- Buatlah latihan, soal-soal pada buku "Advanced Engineering Mathematics", Edwin Kreyszig, pada sesi problems for 2.4 dan 2.5 (hal. 71 – 75).

Pemodelan: Getaran Bebas

- Perhatikan Sistem mekanik getaran berikut:



Keterangan:
m = masa benda (kg);
f = koefisien redaman {(N-det)/m};
k = koefisien kekakuan pegas (N/m)

- Bagaimana ***model matematik*** dari sistem getaran bebas di atas?
- Bagaimana bentuk ***pergeseran*** benda yg bermasa *m* pada sistem itu?

F(t)

Pemodelan: Getaran Bebas

- Untuk memperoleh model matematik dari sistem getaran bebas di atas, digunakan hukum Newton ke-2,
- "***Massa* x *Percepatan* = *Gaya***",
- *Gaya* adalah ***resultante*** dari semua gaya aksi yang bekerja pada benda tersebut.

2. PD Orde 2 Non Homogin

- Beberapa cara penyelesaian PD Non Homogin :
  - Metode Operator Differensial
  - Metode Koefisien Tidak Tentu

Metode Operator Differensial

- METODE OPARATOR DIFFERENSIAL
  - Penyelesaian Umum PD (PUPD) utk PD Non Homogin:

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

  - $Y_h(t)$: penyelesaian homogin, didapatkan dari PD Homogin
  - $Y_p(t)$: penyelesaian partikulir, didapatkan dari PD Non Homogin

Metode Operator Differensial

- Dicontohkan PD Linier Koefisien Konstan Orde 2,
- Bentuk Umumnya:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = F(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = F(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{1}{\left(a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right)} F(t)$$

$$y = \frac{1}{h(D)} F(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Metode Operator Differensial

- Penyelesian PD sangat ditentukan oleh input F(t),
- Secara umum ada 5 jenis input F(t):
  - Fungsi konstan (step function),
  - Fungsi polinomial (polynomial function),
  - Fungsi sinusoida (sinusoidal function),
  - Fungsi eksponensial (exponential function),
  - Kombinasi fungsi eksponensial dengan fungsi sinusoida

Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input $F(t)$:

1. $F(t)=K$ (K=konstan) → Step function

   Penyelesaian Partikulir $Y_p(t) = (K/a_0)$

2. $F(t)=e^{-at}$ (a konstan)

   Penyelesaian Partikulir $Y_p(t) = e^{-at}/h(D) = e^{-at}/h(-a)$ → syarat $h(-a) \neq 0$

   Bila $h(-a) = 0$, penyel. Partikulir :

   $Yp(t) = (t^n/n!)e^{-at}$, n= orde dari PD

Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input F(t):

3. F(t)=Fungsi sinusoida (ada 2 macam)

   3.1. F(t) = sin(ωt),

$$Yp(t) = \frac{\sin \omega t}{h(D)} = \frac{\sin \omega t}{i(D^2)} = \frac{\sin \omega t}{i(-\omega^2)} \rightarrow i(-\omega^2) \neq 0$$

$$Bila \quad i(-\omega^2) = 0 \Rightarrow Y_p(t) = \frac{-t}{2\omega}\cos \omega t$$

Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input F(t):

3. F(t)=Fungsi sinusoida (ada 2 macam)

   3.2. F(t) = cos(ωt),

$$Yp(t) = \frac{\cos \omega t}{h(D)} = \frac{\cos \omega t}{i(D^2)} = \frac{\cos \omega t}{i(-\omega^2)} \rightarrow i(-\omega^2) \neq 0$$

$$Bila \quad i(-\omega^2) = 0 \Rightarrow Y_p(t) = \frac{t}{2\omega} \sin \omega t$$

Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

$$1)\, y'(t) + 2y(t) = 4 \rightarrow y(0) = 0$$

$$2)\, \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = -5 \rightarrow i(0) = -10$$

$$3)\, 3\frac{dv(t)}{dt} + 9v(t) = 18 \rightarrow v(0) = 10$$

$$4)\, \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 2e^{-3t} \rightarrow x(0) = 0$$

$$5)\, 4\frac{dv(t)}{dt} + 8v(t) = 10e^{-3t} \rightarrow v(0) = 0$$

$$6)\, \frac{dp(t)}{dt} + 5p(t) = 2e^{-5t} \rightarrow p(0) = 10$$

Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

$$7)\ 2\frac{di(t)}{dt}+8i(t)=e^{-4t}\rightarrow i(0)=-3$$

$$8)\ \frac{d^2i(t)}{dt^2}+7\frac{di(t)}{dt}+10i(t)=20\rightarrow i(0)=0; i'(0)=1$$

$$9)\ 3\frac{d^2v(t)}{dt^2}+9\frac{dv(t)}{dt}+6v(t)=36e^{-4t}\rightarrow v(0)=0; v'(0)=0$$

$$10)\ \frac{d^2v(t)}{dt^2}+6\frac{dv(t)}{dt}+9v(t)=4e^{-3t}\rightarrow y(0)=0; y'(0)=0$$

$$11)\ \frac{d^2x(t)}{dt^2}+7\frac{dx(t)}{dt}+10x(t)=3e^{-2t}\rightarrow x(0)=0; x'(0)=0$$

$$12)\ \frac{d^2p(t)}{dt^2}+3\frac{dp(t)}{dt}+2p(t)=5e^{-2t}\rightarrow p(0)=0; p'(0)=0$$

Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

$$13)\ \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4\cos 2t \rightarrow x(0) = 0$$

$$14)\ 5\frac{dv(t)}{dt} + 10v(t) = 10\sin 5t \rightarrow v(0) = 0$$

$$15)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 25y(t) = 20\sin 5t \rightarrow y(0) = 5; y'(0) = 2$$

$$16)\ \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 9v(t) = 18\cos 3t \rightarrow v(0) = 0; v'(0) = 0$$

Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input F(t):

4. F(t)=ramp linier; $F(t) = \mathrm{k}t$

$$Yp(t) = \frac{t}{h(D)} = \frac{t}{(1+Q(D))} = \{1 - Q(D) + Q^2(D) - Q^3(D) + \ldots\}t$$

Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

- Selesaikan persamaan differensial berikut:

$$17)\ 2\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 20t \rightarrow x(0) = 0$$

$$18)\ \frac{dv(t)}{dt} + 3v(t) = 9t \rightarrow v(0) = 5$$

$$19)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 16t \rightarrow y(0) = 5; y'(0) = 2$$

$$20)\ \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4v(t) = 20t \rightarrow v(0) = 2; v'(0) = 0$$

Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input F(t):

5. F(t)=damped sinusoidal wave; $F(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$

$$Yp(t) = \frac{e^{-at}\sin(\omega t)}{h(D)} = e^{-at}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{h(D-a))}\right\}$$

Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

- Selesaikan PD berikut:

$$21)\ \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 12e^{-2t}\sin 2t \rightarrow x(0) = 5$$

$$22)\ 5\frac{dv(t)}{dt} + 25v(t) = 50e^{-3t}\cos 2t \rightarrow v(0) = 0$$

$$23)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = e^{-t}\cos 2t \rightarrow y(0) = 0; y'(0) = 1$$

4. METODE KOEFISIEN TIDAK TENTU

- Penyelesaian homoginnya (Y_h) tetap menggunakan Operator D,
- Untuk penyelesaian partikulirnya (Y_p) menggunakan metode koefisien tidak tentu,
- Lihat tabel koefisien tidak tentu,
- Tabel pemisalan Y_p, ditentukan oleh jenis fungsi input F(t) yang diggunakan.

Tabel Koefisien Tidak Tentu

F(t)	Pilihan Y_p
ke^{at}	Ce^{at}
$kt^n (n = 0,1,2,...)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + ... + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega t$	$K \cos \omega t + M \sin \omega t$
$k \sin \omega t$	

METODE KOEFISIEN TIDAK TENTU

- Beberapa bentuk penyelesaian Yp :

1. Jika input F(t) merupakan salah satu jenis yang ada di tabel, maka pilihlah Y_p sesuai dengan pemisalan yang ada pada tabel,
2. Jika input F(t) merupakan jumlahan dari fungsi-fungsi input pada tabel, maka pilihlah Y_p yang juga jumlahan dari fungsi-fungsi pemisalan yang bersesuaian,
3. Jika input F(t) sama dengan jenis akar karakteristik, maka kalikan pemisalan Y_p dengan variabel '**t**' bila x(t) sama dengan akar tunggal, dan kalikan dengan '**t^2**' bila x(t) sama dengan akar kembar.

METODE KOEFISIEN TIDAK TENTU

- Contoh: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan Metode Koefisien Tidak Tentu.

$$1)\ \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 8x^2$$

$$2)\ 5\frac{d^2v(t)}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt} - 2v(t) = 10\cos t$$

$$3)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4y + e^{3t}$$

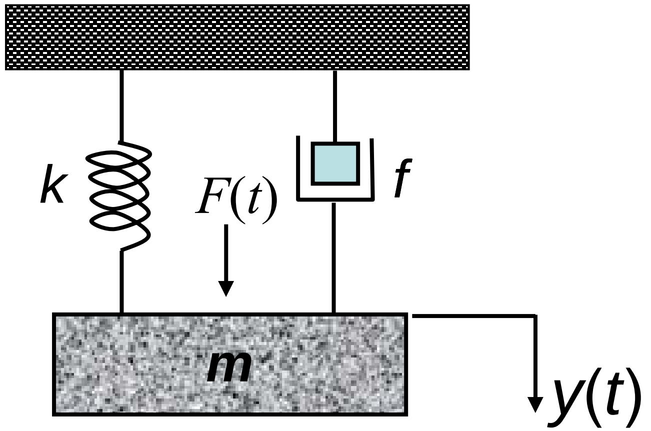
$$4)\ \frac{d^2v(t)}{dt^2} - 2\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = (D-1)^2 y = e^t + 1$$

SOAL

- Untuk soal-soal di atas, selesaikan dengan metode koefisien tidak tentu (23 soal).

Pemodelan: Getaran Paksa. Resonansi

24. Bagaimana bentuk model matematik dari sistem mekanik getaran di bawah ini, bila mendapatkan input gaya (driving force) $F(t)=F_0\cos\omega t$

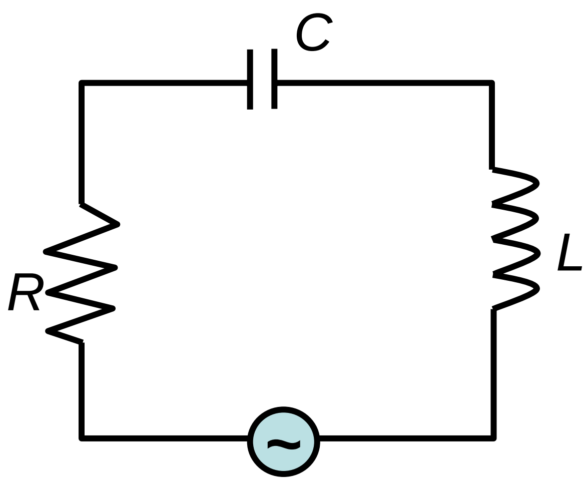


Keterangan:
m = masa benda (kg);
f = koefisien redaman {(N-det)/m};
k = koefisien kekakuan pegas (N/m)

25. Bagaimana bentuk pergeseran (*forced motion*) benda pada sistem mekanik getaran soal no.24?

Pemodelan "Electrical Circuit"

26. Bagaimana model matematik dari sistem rangkaian listrik "RLC circuit" di bawah ini, bila input tegangan adalah $E(t)=E_0\sin\omega t$



$E(t)=E_0\sin\omega t$

27. Bagaimana bentuk output (i(t)) dari model matematik sistem rangkaian listrik pada soal no.26

Analogy System

- Tabel analogi Besaran ***Electrical*** dan ***Mechanical***

Electrical System	Mechanical System
Induktansi *L*	**Massa (*m*)**
Resistansi *R*	**Konstanta peredam (*f*)**
Kebalikan kapasitansi C	**Koefisien pegas *k***
Derivatif $E_0\omega\cos\omega t$ dari gaya elektromotif	**Driving force $F_0\cos\omega t$**
Arus *I*(*t*)	**Pergeseran *y*(*t*)**

The End
of
Non Homogin Diff. Eq.