Transformasi Laplace

Slide: Tri Harsono

PENS - ITS

1. Pendahuluan

- Transformasi Laplace dapat digunakan untuk menyatakan model matematis dari sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu,
- Transformasi Laplace dapat menyelesaikan penyelesaian persamaan differensial sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu,
- Transformasi Laplace dapat digunakan untuk mencari kestabilan sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu,
- Dalam ilmu pengaturan, transformasi Laplace dinyatakan sebagai teori kontrol klasik, yang digunakan untuk mencari kestabilan sistem,
- Transformasi Laplace dapat mencari respon atau fungsi tanggapan sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu

2. Definisi Transformasi Laplace

- Suatu fungsi (sinyal atau gelombang) $f(t)$ yang dinyatakan dalam interval waktu t positif, dapat dinyatakan dalam bidang s dengan menggunakan transformasi Laplace, dengan hasil transformasi $F(s)$,
- Definisi tranformasi Laplace :

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

2. Definisi Transformasi Laplace

- Penulisan transformasi Laplace:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Dimana :

L = tranformator,

f(*t*) = fungsi waktu,

F(*s*) = hasil transformasi (dalam bidang frekwensi atau bidang *s*

3. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan

- Contoh: Carilah transformasi Laplace untuk fungsi f(t) = 1; $t \geq 0$
- Transformasi Laplace:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}.1dt$$

$$= \frac{1}{s}$$

3. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan

- Contoh: Carilah transformasi Laplace untuk fungsi $f(t) = k$; $t \geq 0$
- Transformasi Laplace:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} .k dt$$

$$= \frac{k}{s}$$

4. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan, dengan interval waktu terbatas

- Untuk interval waktu terbatas $t_a \le t \le t_b$
- Transformasi Laplace dari fungsi konstan $f(t)=k$:

$$F(s) = \int_{t_a}^{t_b} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} e^{-st}.kdt$$

$$= \frac{k}{s}(e^{-t_a s} - e^{-t_b s})$$

4. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan, dengan interval waktu terbatas

- Contoh: Carilah transformasi Laplace untuk fungsi f(t) = 1; $0 \le t \le 10$
- Transformasi Laplace:

$$F(s) = \int_0^{10} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{10} e^{-st}.1dt$$

$$= \frac{1}{s}(1 - e^{-10s})$$

4. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan, dengan interval waktu terbatas

- Contoh: Carilah transformasi Laplace untuk fungsi f(t) = k; $a \le t \le b$
- Transformasi Laplace:

$$F(s) = \int_a^b e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_a^b e^{-st} .k dt$$

$$= \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

4. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan, dengan interval waktu terbatas

- ***Kesimpulan:*** Untuk fungsi step (konstan) *f*(*t*) = *k*; dengan interval waktu terbatas $t_a \le t \le t_b$
- Transformasi Laplace:

$$F(s) = \frac{k}{s}(e^{-t_a s} - e^{-t_b s})$$

$$= \frac{k}{s}e^{-t_a s} - \frac{k}{s}e^{-t_b s}$$

$$= F_{t_a}(s) - F_{t_b}(s)$$

4. Transformasi Laplace untuk fungsi konstan, dengan interval waktu terbatas

- Soal:Carilah transformasi Laplace dari fungsi

$$1. f(t) = 10; \qquad 2 \le t \le 7$$

$$2. f(t) = 3; \qquad 0 \le t \le 4$$

$$3. f(t) = 12; \qquad 12 \le t \le 23$$

$$4. f(t) = A; \qquad a \le t \le d$$

$$5. f(t) = C; \qquad 0 \le t \le T$$

5. Linieritas dari Transformasi Laplace

- Transformasi Laplace adalah operasi linier,
- Yaitu: Bila terdapat beberapa fungsi, misal $f(t)$ dan $g(t)$ yang masing-masing mempunyai transformasi Laplace dan ada bilangan skalar a, b, maka berlaku hukum linieritas sbb:

$$
\begin{aligned}
L\{af(t)+bg(t)\} &= aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\} \\
&= aF(s)+bG(s)
\end{aligned}
$$

5. Linieritas dari Transformasi Laplace

- Pembuktian linieritas di atas dengan definisi:

$$L\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]dt$$

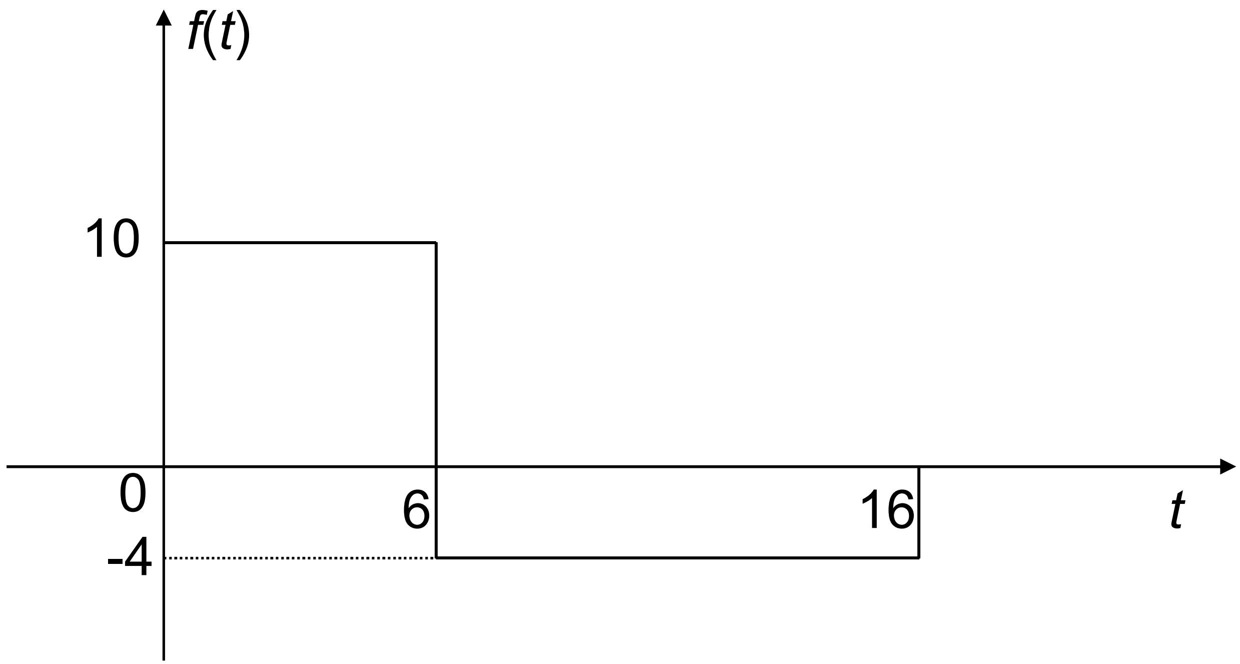
$$=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

$$=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$$

$$=aF(s)+bG(s)$$

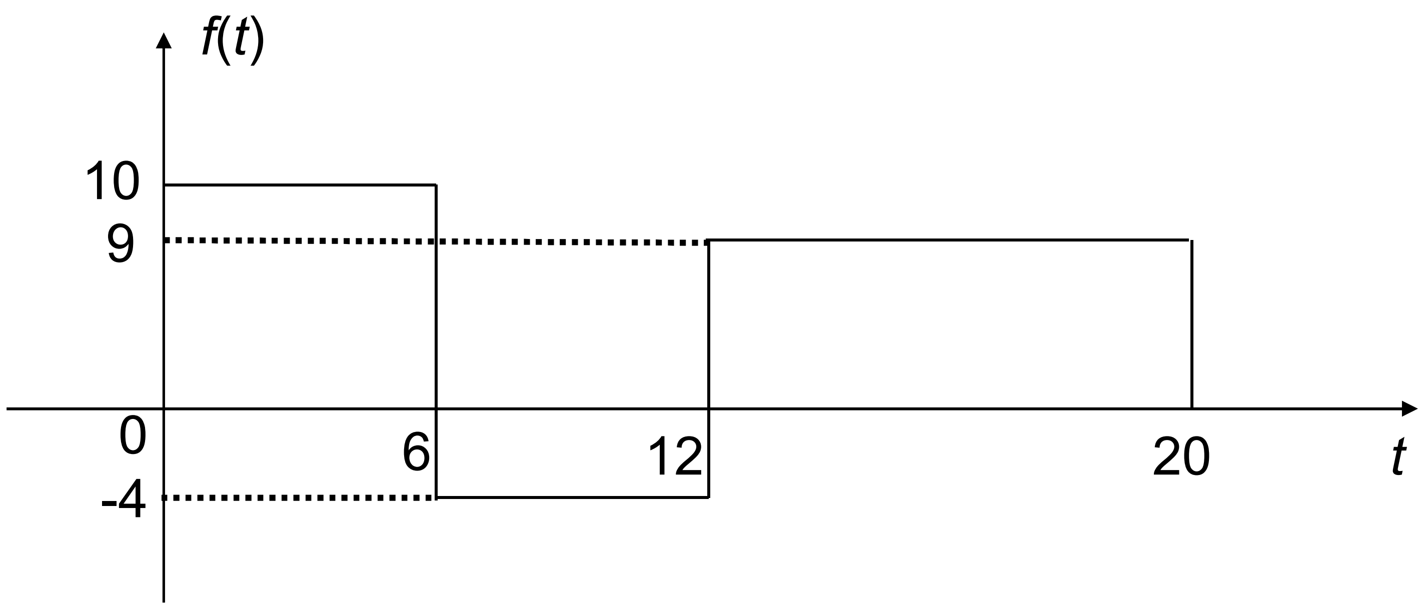
6. Transformasi Laplace dari gabungan fungsi konstan

- *Contoh*: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi seperti pada gambar berikut:



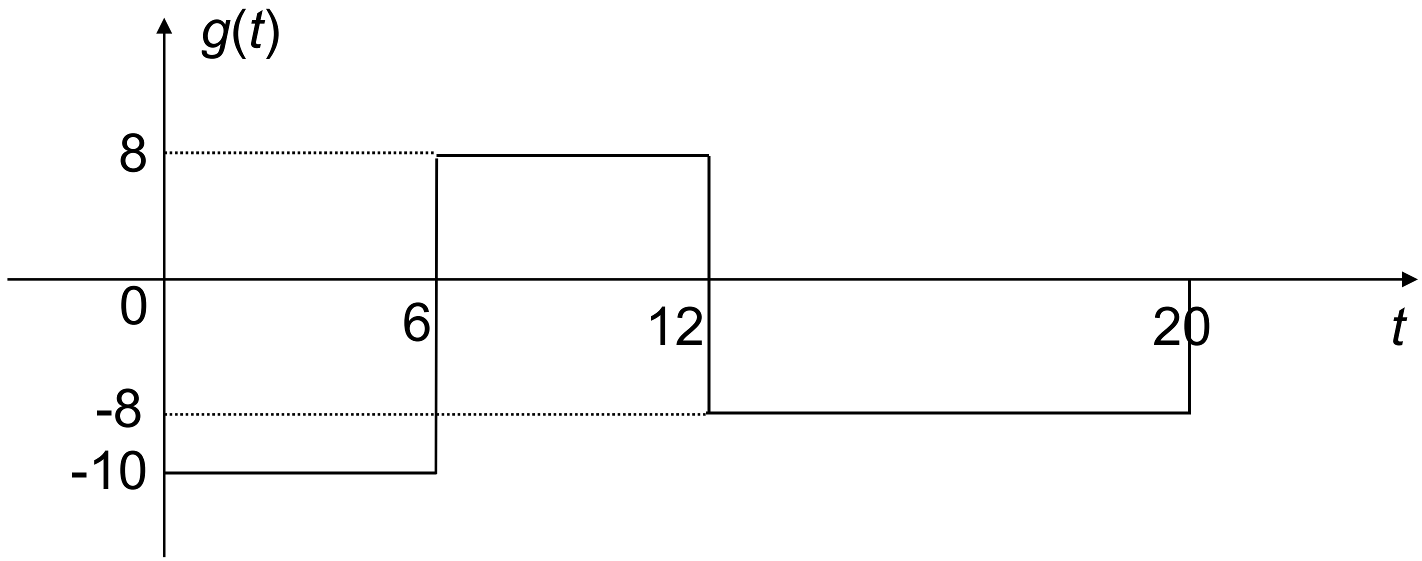
6. Transformasi Laplace dari gabungan fungsi konstan

- *Contoh*: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi seperti pada gambar berikut:



6. Transformasi Laplace dari gabungan fungsi konstan

- *Contoh*: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi seperti pada gambar berikut:



6. Transformasi Laplace dari fungsi eksponensial Positif

- Contoh: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi: $f(t) = e^{at}; \qquad t \geq 0$

Solusi :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} . e^{at} dt$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

6. Transformasi Laplace dari fungsi eksponensial Negatif

- Contoh: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi: $f(t) = e^{-at}; \qquad t \geq 0$

Solusi :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} . e^{-at} dt$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

6. Transformasi Laplace dari fungsi Sinusoida

- Contoh: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi: $f(t) = \sin \omega t; t \geq 0$

Solusi :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} . \sin \omega t dt$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

6. Transformasi Laplace dari fungsi Sinusoida

- Contoh: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi: $f(t) = \cos \omega t; t \geq 0$

Solusi :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} . \cos \omega t dt$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

6. Transformasi Laplace dari fungsi Ramp (Tanjakan)

- Contoh: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi ramp:

$$f(t) = t; t \geq 0$$

Solusi :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}.tdt$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

6. Transformasi Laplace dari fungsi Ramp (Tanjakan)

- Contoh: Dapatkan transformasi Laplace dari fungsi ramp:

$$f(t) = t^n ; t \geq 0$$

Solusi :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} . t^n dt$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

7. Tabel Transformasi Laplace

Contoh Tabel Transformasi Laplace

No.	F(t)	F(s)
1	k	$\frac{k}{s}$
2	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
3	kt	$\frac{k}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

8. Shifting Theorem (Teorema Pergeseran)

Frequence domain
(kawasan frekwensi *s*)

$$e^{at} f(t) \rightarrow F(s-a)$$

$$f(t-a) \rightarrow e^{-as} F(s)$$

Time domain
(kawasan waktu *t*)

SOAL:

Carilah transformasi Laplace dari fungsi-fungsi berikut untuk t ≥ 0:

$$1. g(t) = 0.5t^2 e^{-3t}$$

$$2. g(t) = e^{-t/2} \sin \frac{t}{4}$$

$$3. g(t) = e^{-t} \sin(\omega t + \theta)$$

$$4. g(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

$$5. g(t) = e^{t}(c + bt)$$

9. Transformasi Laplace untuk Derivative dan Integral

- Transformasi Laplace dari differensial orde satu fungsi *f*(*t*) *secara sederhana* merupakan: perkalian antara *F*(*s*) dengan *s*
- *Definisi* :

$$L(f') = L(\frac{df}{dt}) = sL(f) - f(0)$$

$$= sF(s) - f(0)$$

Ket.: *F*(*s*) adalah transformasi Laplace dari *f*(*t*),
f(0) adalah nilai awal fungsi *f*(*t*)

9. Transformasi Laplace untuk Derivative dan Integral

- Bukti:
  - Menggunakan definisi transformasi Laplace dan integral parsial

$$L(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= [e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

9. Transformasi Laplace untuk Derivative dan Integral

- Dari definisi transformasi Laplace untuk derivatif pertama fungsi f(t), maka dapat dinyatakan transformasi Laplace untuk derivatif kedua, ketiga dan seterusnya

$$L(f'') = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L(f''') = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\vdots$$

$$L(f^{(n)}) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

9. Transformasi Laplace untuk Derivative dan Integral

- Contoh: Carilah transformasi Laplace dari turunan pertama fungsi berikut:

1. $f(t) = t^2$
2. $f(t) = \sin^2 t$
3. $f(t) = t \sin 2t$
4. $f(t) = t \cos 2t$

9. Transformasi Laplace untuk Derivative dan Integral

- Transformasi Laplace dari **integral** suatu fungsi *f*(*t*) adalah

$$L(\int_0^t f(\tau)d\tau) = \frac{1}{s}L\{f(t)\}$$

$$L(\int_0^t f(\tau)d\tau) = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int f(t)dt\Big|_{t=0}$$

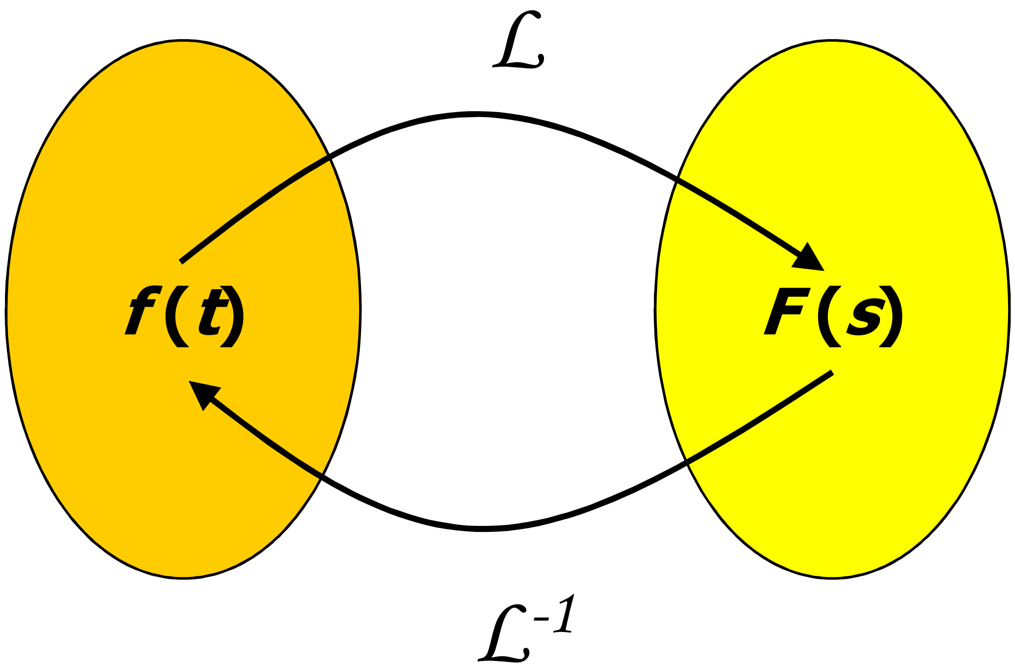
Ket. : operasi invers dari diferensial adalah integral, sehingga
Hasil transformasi Laplace dari differensial f(t)
= sF(s) (Perkalian)
Hasil transformasi Laplace dari integral f(t)
= (1/s)F(s) (Pembagian)
Dimana pembagian adalah operasi invers dari perkalian

9. Transformasi Laplace untuk Derivative dan Integral

- Contoh: Diketahui $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$

  Tentukan $f(t)$

10. Invers Transformasi Laplace [Transformasi Laplace Balik]



10. Invers Transformasi Laplace [Transformasi Laplace Balik]

- Cara Penulisan Invers T.L. :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

- Ada 2 cara invers transformasi Laplace :

1. Pecah Parsial (menggunakan *Tabel T.L.*)
2. Integral Invers T.L. (menggunakan *Teorema Residu*)

10.1. Invers Transformasi Laplace [Pecah Parsial]

$$F(s) = \frac{H(s)}{G(s)}$$

- Yang perlu diperhatikan dalam $F(s)$ adalah penyebutnya $G(s)$, bukan pembilangnya $H(s)$,
- Derajad s dari $G(s)$ lebih besar atau sama dengan derajad s dari $H(s)$,
- G(s) berbentuk faktorisasi,
- Dalam ***ilmu kontrol***, untuk mencari kestabilan sistem, dapat digunakan nilai faktorisasi dari $G(s)$.

10.1. Invers Transformasi Laplace [Pecah Parsial]

- Ada beberapa bentuk faktorisasi dari $G(s)$, yaitu:
  i. Faktor tak berulang $(s\text{-}a)$
  ii. Faktor Berulang $(s\text{-}a)$
  iii. Faktor Kompleks tak berulang $(s-a)(s-\overline{a})$
  iv. Faktor Kompleks berulang $[(s-a)(s-\overline{a})]^2$

i. Faktor tak berulang (*s-a*)

$$F(s)=\frac{H(s)}{G(s)}=\frac{A}{(s-a)}+W(s)$$

$$f(t)=AL^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}+L^{-1}\{W(s)\}$$

$$=Ae^{at}+w(t)$$

i. Faktor tak berulang (s-a)

Contoh:

Carilah invers T.L. dari fungsi² $F(s)$ berikut

$$1.\ F(s) = \frac{1}{(s-3)(s+5)}$$

$$2.\ F(s) = \frac{s^2}{s(s-3)(s+5)}$$

$$3.\ F(s) = \frac{s}{s(s+1)(s-3)}$$

$$4.\ F(s) = \frac{1}{s(s-0.3)(s+3.4)}$$

ii. Faktor Berulang (*s*-*a*)

$$F(s) = \frac{H(s)}{G(s)} = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-a)^2} + W(s)$$

$$f(t) = AL^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} + BL^{-1}\{\frac{1}{(s-a)^2}\} + L^{-1}\{W(s)\}$$

$$= Ae^{at} + Bte^{at} + w(t)$$

ii. Faktor Berulang (s-a)

Contoh:

Carilah invers T.L. dari fungsi² $F(s)$ berikut

$$1.\ F(s) = \frac{1}{(s-3)^2 s}$$

$$2.\ F(s) = \frac{s^2}{s(s^2+4s+4)}$$

$$3.\ F(s) = \frac{s}{s(s+3)^2(s-1)}$$

$$4.\ F(s) = \frac{1}{s(s^2-0.6s+0.09)(s+1)}$$

10.2. Invers Transformasi Laplace [Integral Invers T.L., Teo. Residu]

- Invers T.L. dari suatu fungsi *F*(*s*) dapat dicari dengan menggunakan ***integral invers*** T.L.
- Integral invers T.L., dapat dihitung dengan menggunakan ***teorema residu***
- **Teorema residu** dari suatu fungsi *f*(*t*) adalah :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{G(s)}{(s-a)^n} ds = \lim_{s \to a} \frac{G^{(n-1)}(s)}{(s-a)^n} \cdot (s-a)^n$$

10.2. Invers Transformasi Laplace [Integral Invers T.L., Teo. Residu]

- Integral Invers T.L. dari suatu fungsi $F(s)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s).e^{st} ds$$

- **Analogi** integral invers dengan teorema residu :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_c F(s).e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{G(s)}{(s-a)^n} ds = \lim_{s \to a} \frac{G^{(n-1)}(s)}{(s-a)^n} \cdot (s-a)^n$$

10.2. Invers Transformasi Laplace [Integral Invers T.L., Teo. Residu]

- Untuk faktor yang lebih dari satu, $(s\text{-}a)^m, (s\text{-}b)^n, (s\text{-}c)^k$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_c F(s).e^{st}\,ds$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{G(s)}{(s-a)^m (s-b)^n (s-c)^k}\,ds$$

$$f(t) = \left.\frac{G^{(m-1)}(s)}{(s-b)^n (s-c)^k}\right|_{s=a} + \left.\frac{G^{(n-1)}(s)}{(s-a)^m (s-c)^k}\right|_{s=b} + \left.\frac{G^{(k-1)}(s)}{(s-a)^m (s-b)^n}\right|_{s=c}$$

10.2. Invers Transformasi Laplace [Integral Invers T.L., Teo. Residu]

- Contoh: Tentukan $f(t)$ dengan menggunakan teorema Residu

$$1.\ F(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$2.\ F(s) = \frac{4s+4}{s^2+16}$$

$$3.\ F(s) = \frac{2s^2-3s}{(s-2)(s-1)^2}$$

$$4.\ F(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}$$

$$5.\ F(s) = \frac{s^2+s-2}{(s+1)^3}$$

$$6.\ F(s) = \frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$$

10.2. Invers Transformasi Laplace [Integral Invers T.L., Teo. Residu]

- Contoh: Tentukan $f(t)$ dengan menggunakan teorema Residu

$$7.\ F(s) = \frac{s}{(s^2+4)s^2}$$

$$8.\ F(s) = \frac{2s+10}{s(s^2+2s+5)}$$

$$9.\ F(s) = \frac{s^2}{(s+3)^2(s^2+9)^2}$$

$$10.\ F(s) = \frac{3s^2}{s^2(s^2+2s+5)^2}$$

11. Transformasi Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Differensial

- Transformasi Laplace (TL) dapat digunakan untuk menyelesaikan *Persamaan Differensial* (PD),
- Bila PD digunakan sebagai model matematika dari sistem linier tak ubah waktu, maka TL dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem linier tersebut, dalam arti mencari *output system,*
- Dalam penyelesaian atau mencari output system terdapat **fungsi penghubung** antara input dengan output, yang dinamakan dengan "**Fungsi Alih** (**Transfer Function**)" .
- Fungsi Alih sangat penting dalam *ilmu kontrol* sebagai indikator untuk menentukan *kestabilan sistem* linier tak ubah waktu

11. Transformasi Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Differensial

- Contoh: Tentukan penyelesaian PD di bawah ini dengan menggunakan TL

$$1. y'' + 4y' + 3y = 0; \qquad y(0) = 3 \quad y'(0) = 1$$

$$2. y'' + y = 2t; \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$3. y'' + 25y = t; \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.04$$

$$4. y'' - 4y' + 4y = 0; \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

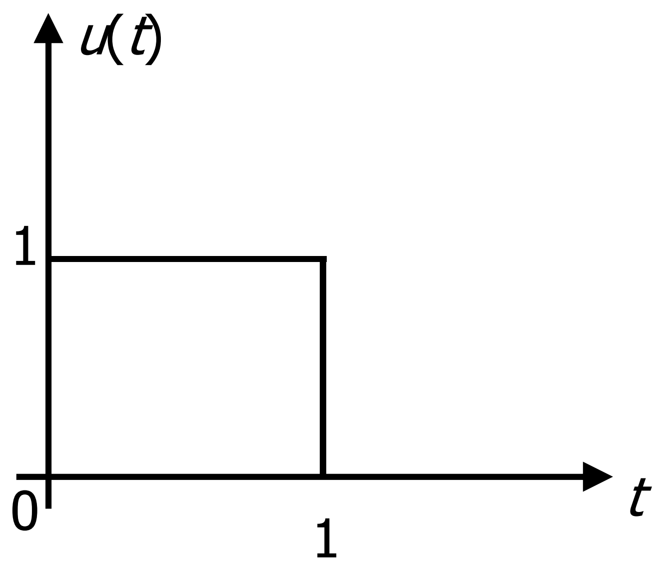
$$5. y'' - 3y' + 2y = 4t; \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

$$6. y'' + 3y' + 2y = \delta(t - a); \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

11. Transformasi Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Differensial

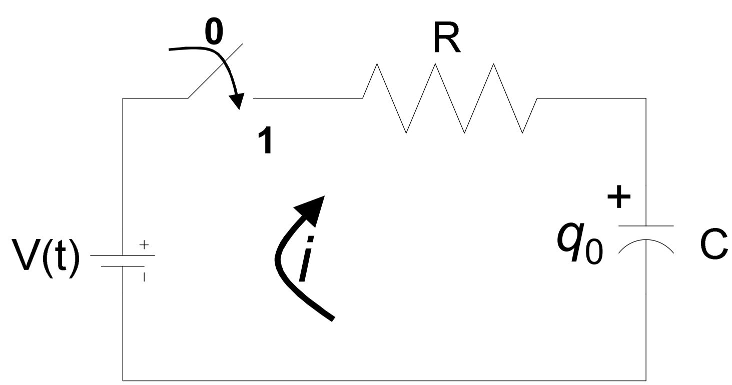
$$7.\; y'' + 2y = u(t) \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

dimana *u*(*t*) adalah unit step function, seperti pada gambar di bawah ini



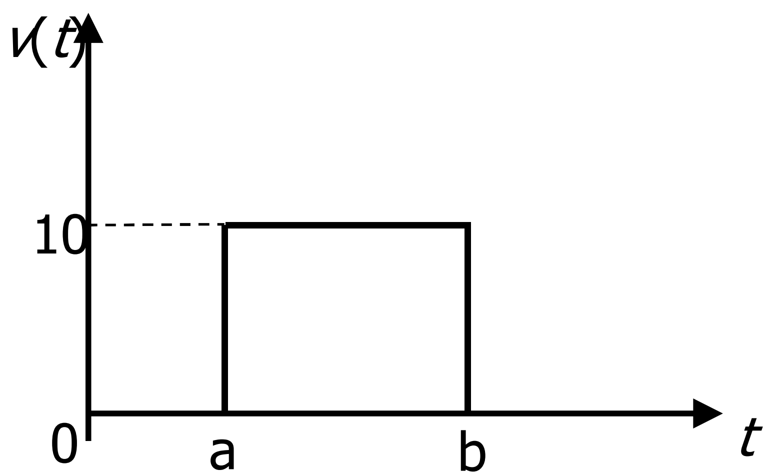
12. Implementasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik

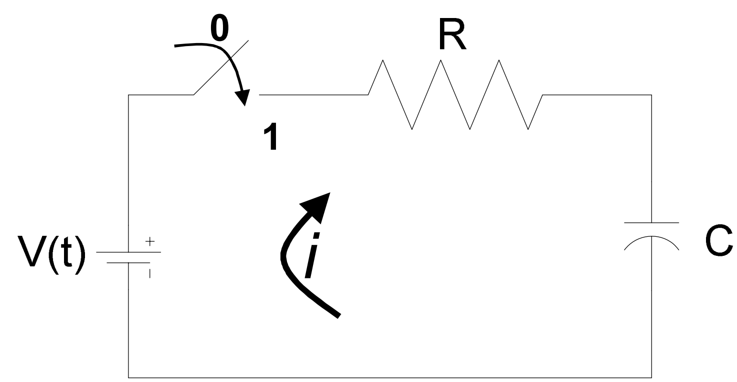
8. Rangkaian RC seri dengan *harga awal dari muatan* kapasitor q_0 dengan polaritas seperti pada gambar. Tegangan terpasang adalah konstan V pada saat switch ditutup. Arus yang mengalir pada rangkaian adalah:



12. Implementasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik

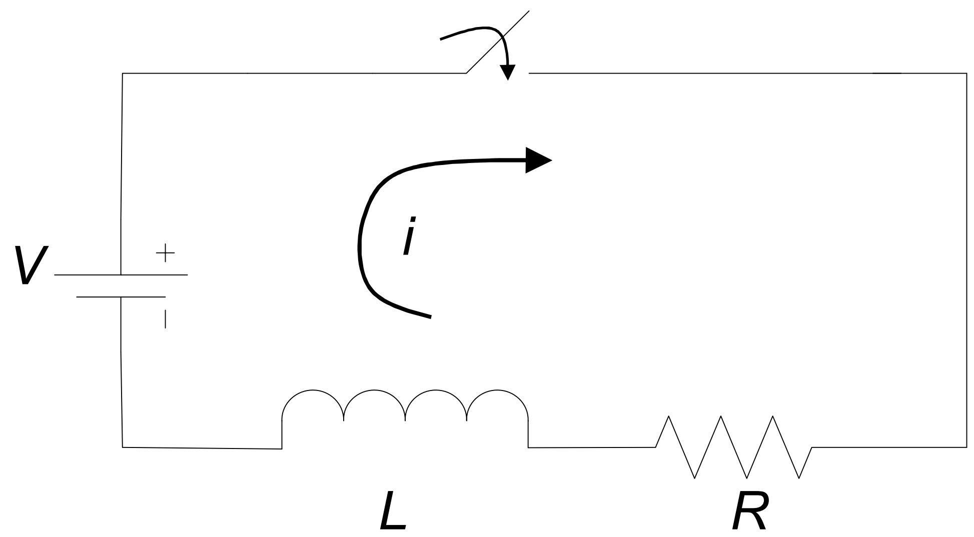
9. Diketahui suatu rangkaian RC seri, pada saat switch ditutup dihubungkan dengan sumber tegangan DC seperti pada gambar. Tentukan arus *i*(*t*) yang mengalir pada rangkaian RC seri tersebut, bila muatan awal kapasitor NOL.





12. Implementasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik

10. Diketahui suatu rangkaian RL seri, pada saat switch ditutup, tegangan terpakai pada rangkaian adalah konstan *V*. Arus yang mengalir pada rangkaian adalah :



Terima kasih