Deret Fourier

Slide: Tri Harsono

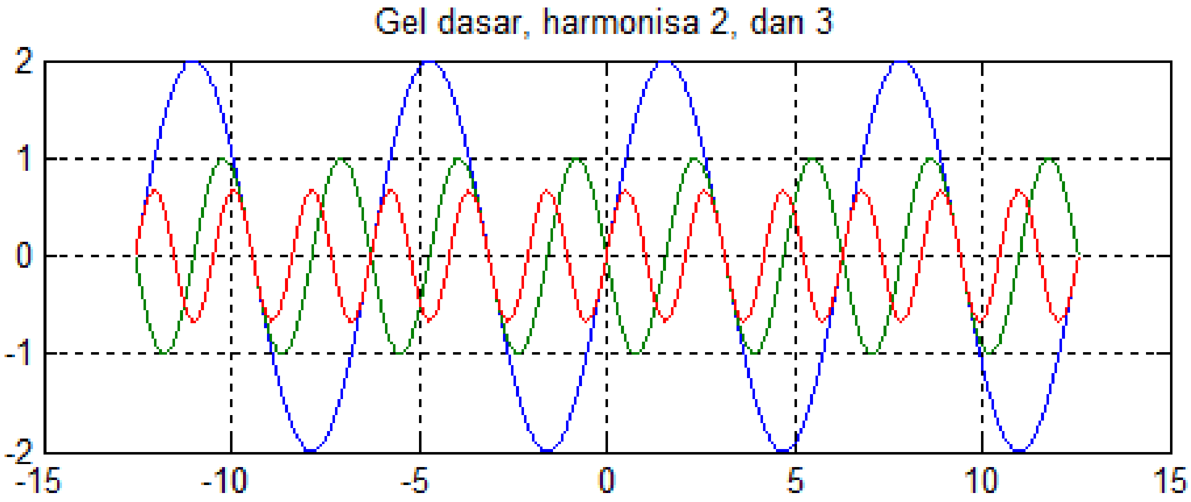
PENS – ITS

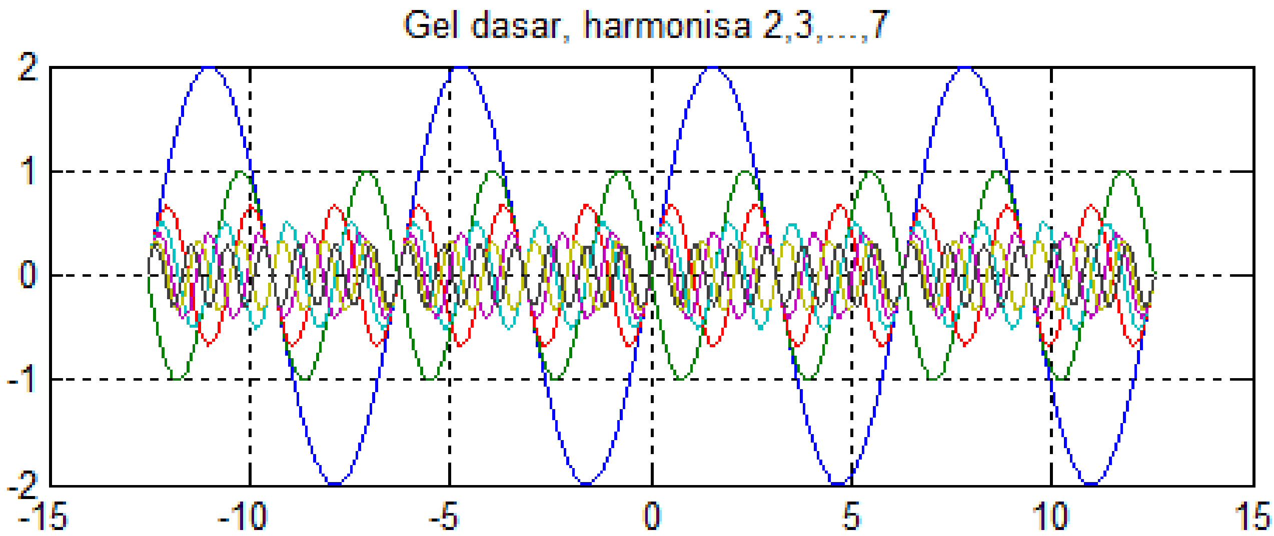
trison@eepis-its.edu

1. Pendahuluan

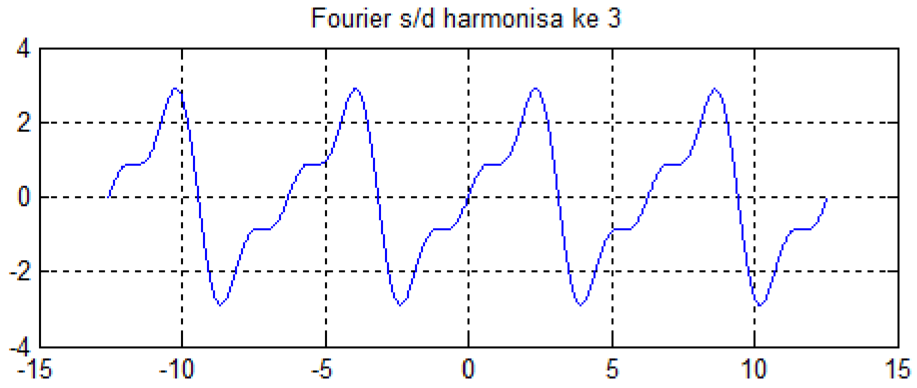
- Gelombang di alam nyata merupakan : Jumlahan gelombang-gelombang pembentuknya (=**gelombang-gelombang harmonisanya**)
- Suatu gelombang periodik f(t), juga dapat dinyatakan dalam jumlahan gelombang^2 harmonisanya,
- Jumlahan gelombang^2 harmonisa dari suatu gelombang di alam ini, dapat dinyatakan dalam suatu deret yang dinamakan dengan “DERET FOURIER”
- Tidak semua gelombang dapat dinyatakan dengan DERET FOURIER
- Gelombang yang dapat dinyatakan dalam deret Fourier adalah gelombang yg memenuhi **SYARAT DIRICHLET**

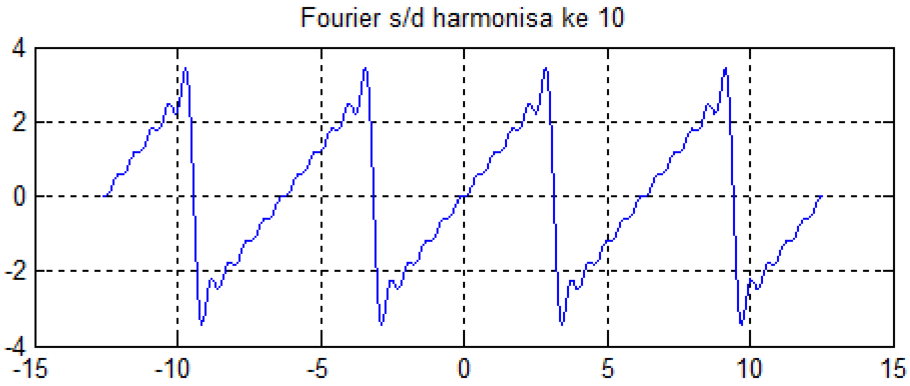
Gelombang dasar & pembentuknya/harmonisa

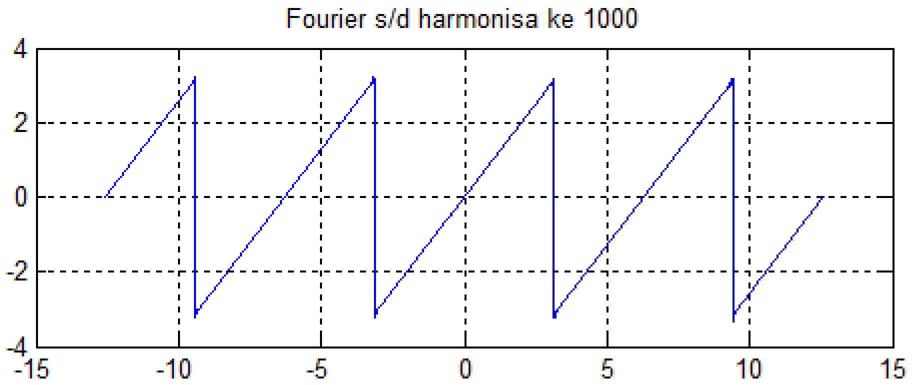




Fourier series dg *n* gel. harmonisa







2. SYARAT DIRICHLET

1. f(t) merupakan fungsi periodik dan bernilai tunggal,
2. Bila dalam satu periode f(t) mempunyai diskontinuitas, maka jumlah diskontinuitas harus berhingga(finite).

2. Deret Fourier

- **Ada 2 jenis deret Fourier**
  1. **Deret Fourier Trigonometri,**
  2. **Deret Fourier Eksponensial Imajiner.**

2. Deret Fourier Trigonometri

- Suatu gelombang periodik f(t) dapat dinyatakan dalam bentuk deret Fourier trigonometri, sbb:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

$\frac{a_0}{2}$ adalah nilai tengah gelombang [nilai rata-rata gelombang f(t)]

a_n dan **b_n** adalah koefisien-koefisien fourier trigono

n adalah gelombang harmonisa ke-n dari gelombang f(t)

ω adalah frekuensi fundamental

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

2. Deret Fourier Trigonometri

- **Nilai Tengah dan koefisien-koefisien Fourier adalah:**

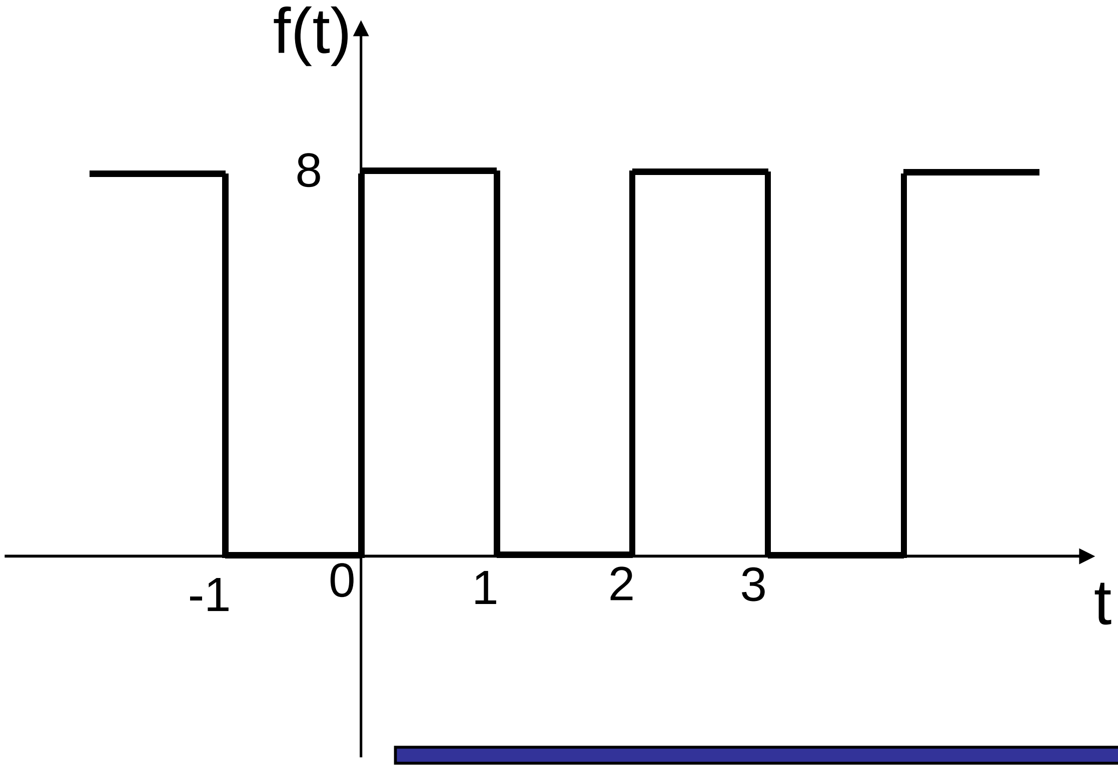
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

2. Deret Fourier Trigonometri

- **Contoh1**: Tentukan uraian deret Fourier trigono dari sinyal periodik berikut (s/d harmonisa ke-5):



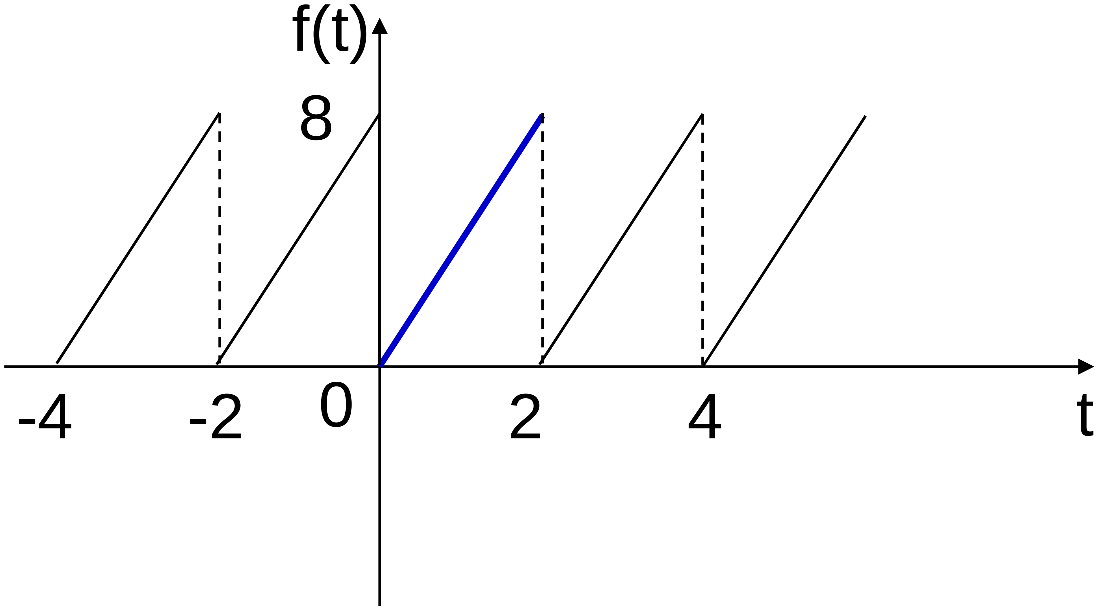
2. Deret Fourier Trigonometri

- Solusi contoh1:

$$\left\{ f(t) = \begin{matrix} 8, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{matrix} \right\}$$

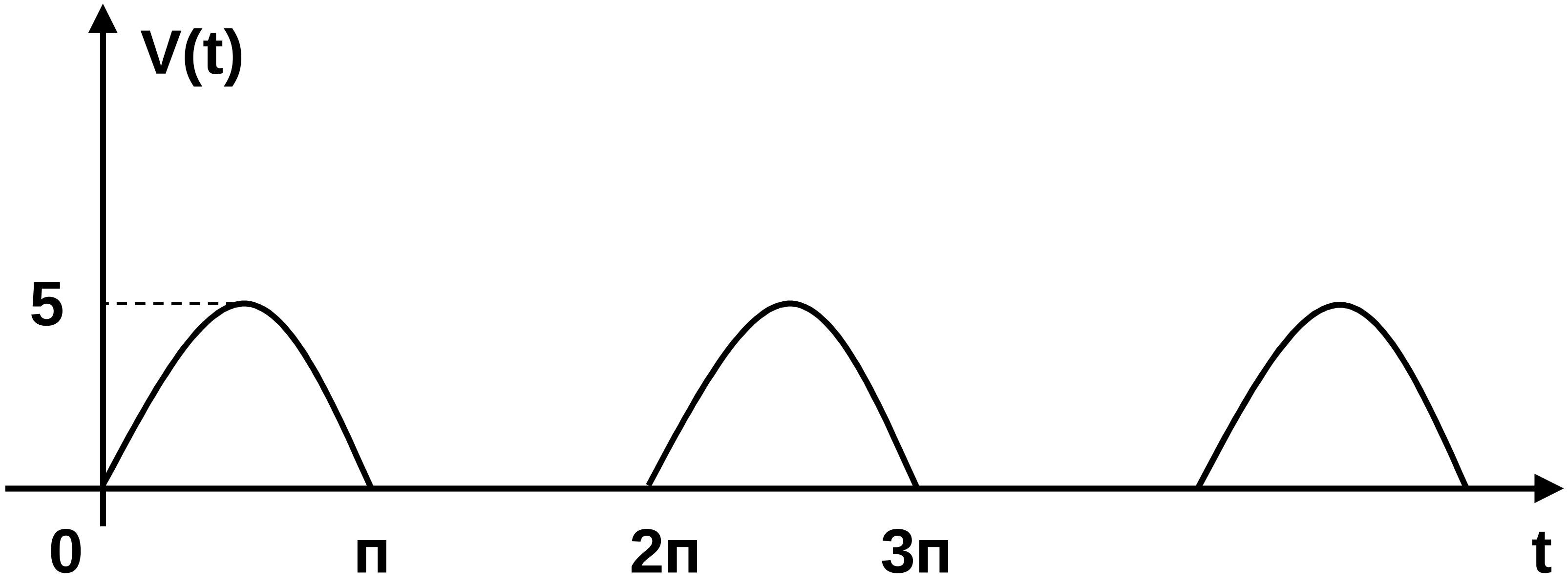
2. Deret Fourier Trigonometri

- **Contoh2**: Tentukan deret Fourier dari gelombang gigi gergaji (triangle wave) berikut (s/d harmonisa ke-5):



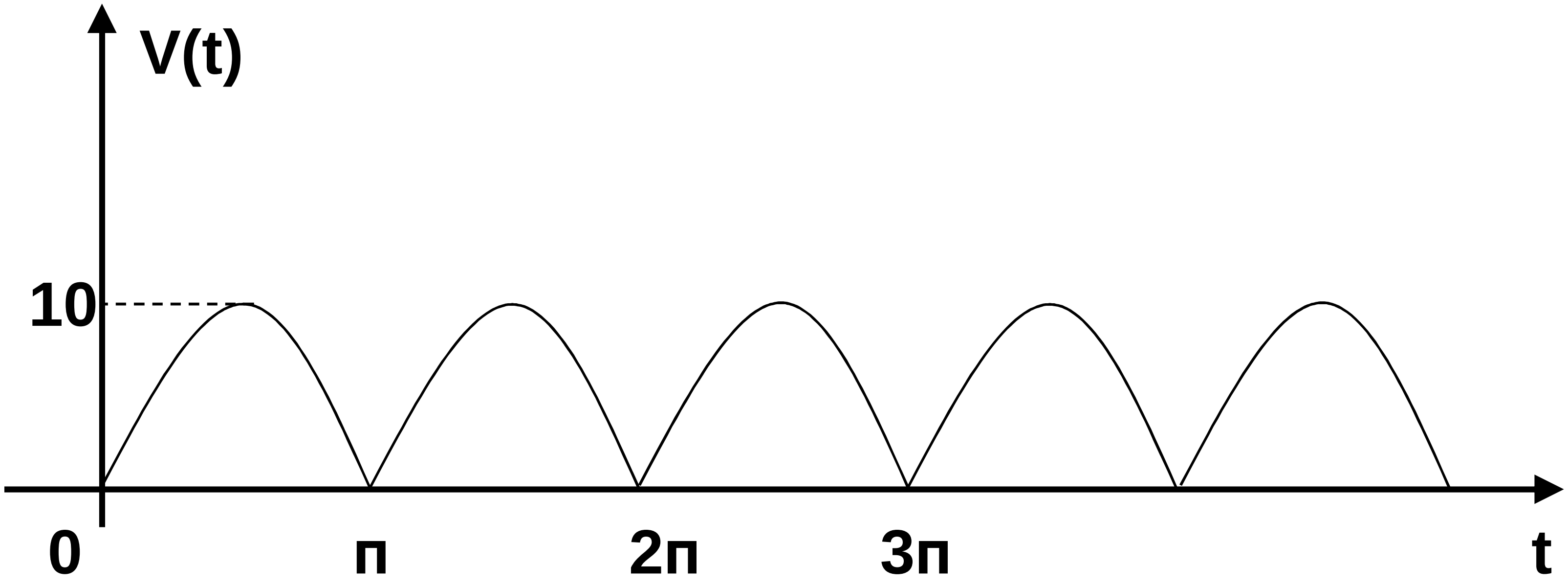
2. Deret Fourier Trigonometri

- **Contoh3**: Tentukan uraian deret Fourier sampai dengan harmonisa ke-5 untuk gelombang "**half rectified**" berikut ini.



2. Deret Fourier Trigonometri

- **Contoh4**: Tentukan uraian deret Fourier sampai dengan harmonisa ke-5 untuk gelombang "**full rectified**" berikut ini.



3. Deret Fourier Eksponensial

- A periodic waveform f(t) satisfying the Dirichlet conditions can also be written as an exponential Fourier series, which is a variation of the trigonometric series,
- The exponential series is

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t}$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) \quad \text{or} \quad A_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-j2\pi nt/T}\,dt$$

3. Deret Fourier Eksponensial

- Hubungan antara koefisien Fourier Kompleks dan koefisien Fourier trigonometri

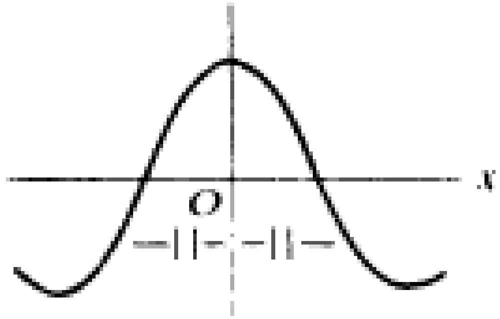
$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,A_n \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,A_n$$

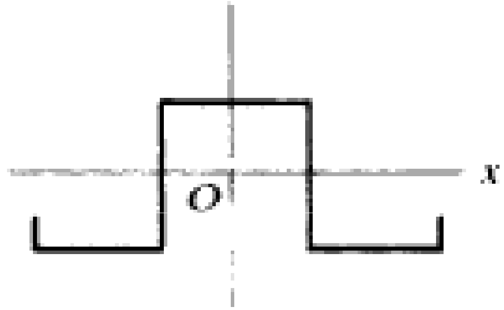
3. Deret Fourier Eksponensial

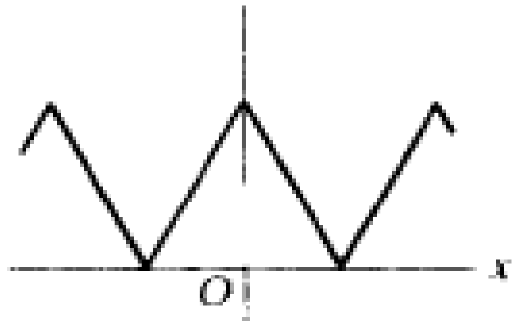
- Contoh:
  - Gelombang/sinyal pada contoh di atas bisa dihitung dg DF Eksponensial/Kompleks

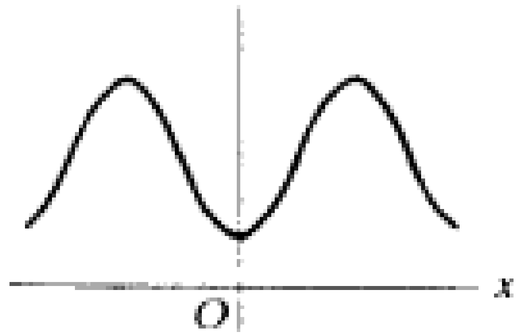
4. Simetri Bentuk Gelombang / Fungsi Ganjil – Fungsi Genap

- Fungsi/gelombang genap bila f(t) = f(-t)



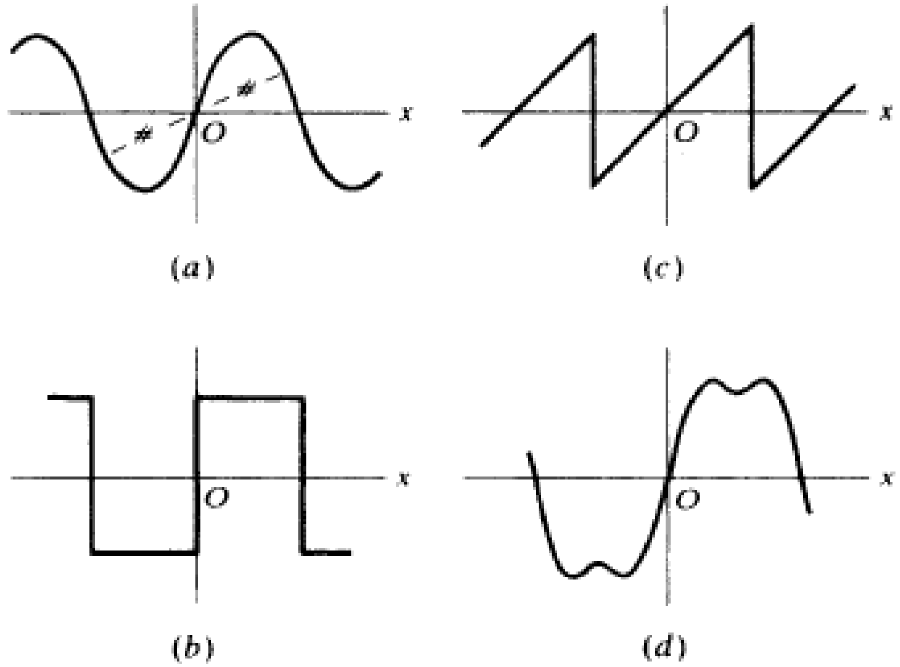






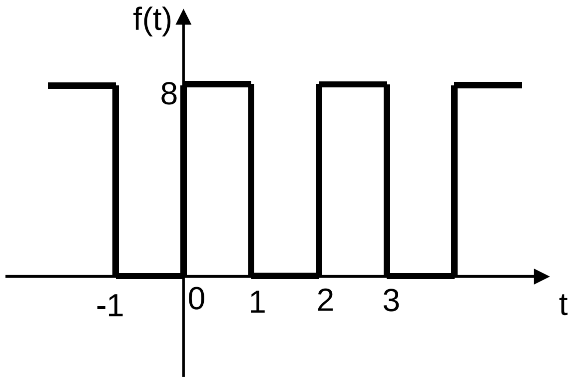
4. Simetri Bentuk Gelombang / Fungsi Ganjil – Fungsi Genap

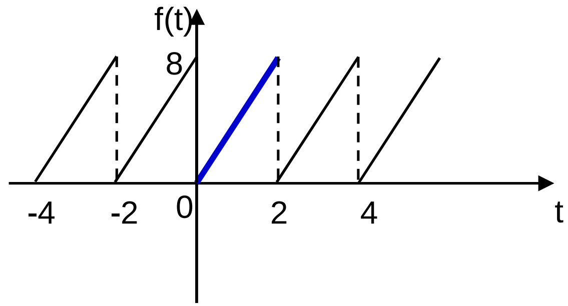
- Fungsi/gelombang ganjil bila f(t) = -f(-t)



4. Simetri Bentuk Gelombang / Fungsi Ganjil – Fungsi Genap

- Fungsi tidak ganjil dan tidak genap:
  - Tidak memenuhi syarat fungsi ganjil dan syarat fungsi genap





4. Simetri Bentuk Gelombang / Fungsi Ganjil – Fungsi Genap

- Fungsi ganjil → DF Sinus
  - → $a0/2=0$; $an=0$; $bn \neq 0$
- Fungsi genap → DF Cosinus
  - → $a0/2 \neq 0$; $an \neq 0$; $bn=0$
- Fungsi tidak ganjil dan tidak genap
  - → $a0/2 \neq 0$; $an \neq 0$; $bn \neq 0$

5. Spektrum Garis/Amplitudo Gelombang Harmonisa

- Ploting yang menunjukkan tiap-tiap amplitudo gelombang harmonisa dalam gelombang disebut line spectrum.
- Spektrum Garis menurun secara cepat untuk gelombang-gelombang dengan deret yang konvergen secara cepat.
- Gelombang-gelombang diskontinu, seperti gigi gergaji dan persegi (pulsa), mempunyai spektrum dengan amplitudo-amplitudo yang menurun perlahan, sejak deret mereka mempunyai harmonisa-harmonisa tinggi yang kuat.
- Harmonisa ke-10 mereka akan sering mempunyai amplitudo dengan nilai siknifikan saat dibandingkan dengan fundamental.

5. Spektrum Garis/Amplitudo Gelombang Harmonisa

- Sebaliknya, deret untuk bentuk-gentuk gelombang tanpa diskontinu dan dengan kemunculan yang smooth pada umumnya akan konvergen secara cepat, dan hanya sedikit suku/harmonisa dibutuhkan untuk membangkitkan/generate gelombang tersebut.
- Konvergensi yang cepat tersebut akan terlihat dari spektrum garis dimana amplitudo harmonisanya menurun dengan cepat, sehingga setiap di atas 5 atau 6 tidak signifikan.

5. Spektrum Garis/Amplitudo Gelombang Harmonisa

- Content harmonisa dan spektrum garis dari suatu gelombang adalah bagian dari sifat gelombang dan tidak pernah berubah, terlepas dari metode analisis yang digunakan.
- Pergeseran dari asalnya memberikan deret trigonometri penampilan yang sama sekali berbeda, dan koefisien deret eksponensial juga sangat berubah.
- Bagaimanapun, harmonisa yang sama selalu muncul dalam deret,
- Dan amplitudo mereka juga sama:

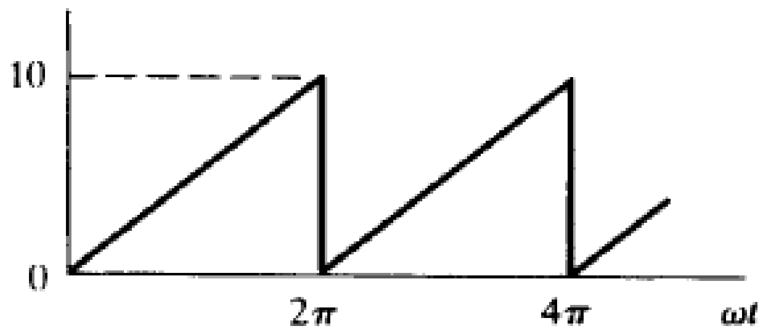
$$c_0 = |\tfrac{1}{2}a_0| \qquad \text{and} \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \geq 1)$$

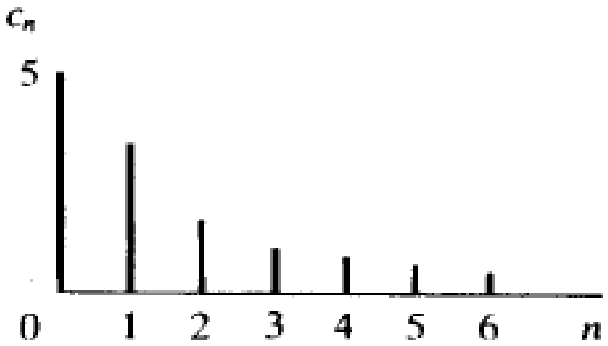
atau

$$c_0 = |A_0| \qquad \text{and} \qquad c_n = |\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_{-n}| = 2|\mathbf{A}_n| \quad (n \geq 1)$$

5. Spektrum Garis/Amplitudo Gelombang Harmonisa

- Catatan bahwa ketika bentuk eksponensial digunakan, amplitudo dari harmonisa ke-n adalah kombinasi kontribusi frekuensi +nϖ dan –nϖ
- Contoh: Berikut adalah gelombang gigi gergaji beserta spektrum garisnya





6. Sintesis Gelombang

- *Sintesis* adalah kombinasi dari beberapa bagian yang membentuk sesuatu secara keseluruhan.
- *Sintesis Fourier* adalah kombinasi kembali dari suku-suku deret trigonometri.
- Sintesis digunakan untuk menyatakan / meyakinkan bahwa deret Fourier dapat menyatakan gelombang periodik berdasarkan suku-suku harmonisanya.

7. Identitas Parseval

- Identitas parseval dapat digunakan untuk mencari nilai efektif atau rms (root-mean-square) dari suatu gelombang periodik *f*(*t*).
- Persamaan identitas parseval:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right)$$

$$= c_0^{\ 2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\ 2}$$

Dimana: *f*(*t*) gelombang periodik

8. Nilai Efektif dan Daya

- Bentuk gelombang periodik dalam deret Fourier:

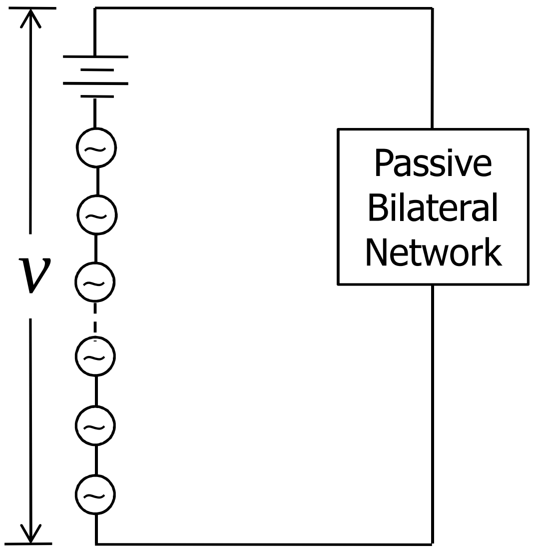
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots$$
$$b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

- Nilai efektif/rms dari gelombang periodik f(t) adalah:

$$F_{rms} = \sqrt{(\frac{1}{2}a_0)^2 + \frac{1}{2}a_1{}^2 + \frac{1}{2}a_2{}^2 + \cdots + \frac{1}{2}b_1{}^2 + \frac{1}{2}b_2{}^2 + \cdots}$$
$$= \sqrt{c_0{}^2 + \frac{1}{2}c_1{}^2 + \frac{1}{2}c_2{}^2 + \frac{1}{2}c_3{}^2 + \cdots}$$

9. Aplikasi Deret Fourier pada Analisis Rangkaian

- Suku-suku suatu deret tegangan utk suatu network linier bisa menghasilkan suku-suku harmonisa yg bersesuaian untuk deret Arus. → menggunakan superposisi
- Kita nyatakan tiap suku deret Fourier tegangan sbg satu sumber tunggal (lihat Gambar 1).

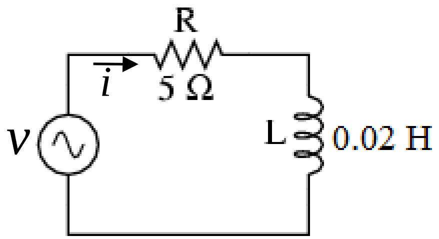


Gambar 1

- Impedansi ekuivalen dari network pada tiap-tiap frekuensi harmonisa $n\omega$ digunakan utk menghitung arus pada harmonisa tersebut.
- Jumlah respon semua individu adalah Respon TOTAL arus i dalam deret yg terbentuk disebabkan oleh tegangan terpasang.

9. Aplikasi Deret Fourier pada Analisis Rangkaian

- Contoh:
  - Suatu rangkaian RL seri dengan nilai R = 5 ohms, L = 0.02 Henry, mempunyai tegangan terpasang $v(t) = 100 + 50\sin\omega t + 25\sin 3\omega t$, dimana ω = 500 rad/sec. Tentukan arus $i(t)$ dan daya rata-rata P.



Project

i. Nyatakan gelombang periodik sembarang, simbolkan dengan $f(t)$.
ii. Carilah deret Fourier trigonometri dari gelombang $f(t)$ tersebut..
iii. Uraikan deret Fourier tersebut sampai dengan harmonisa ke-7.
iv. Buatlah program singkat dengan mathlab dari uraian Fourier tersebut dengan output program adalah grafik sintesis Fourier dari gelombang $f(t)$ tersebut:
   a. Untuk 5 harmonisa pertama (n=1, …, 5).
   b. Untuk 50 harmonisa pertama (n=1, …, 50).
   c. Untuk 500 harmonisa pertama (n=1, …, 500).
   d. Untuk 2000 harmonisa pertama (n=1, …, 2000).
v. Jelaskan apa yang anda amati dengan sintesis gelombang yang berbeda-beda harmonisanya (jelaskan sintesis gelombang iv a,b,c,dan d).

Semoga paham
Amin…